

9-11-15

Θεωρία Αριθμών.

Λοκίδες Φυλάκιου #1

3a)

n φυσικός > 1

x τυχαίος φυσικός

$$A = (x)(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$$

$$\downarrow x = n \cdot \eta + u, 0 \leq u \leq n-1$$

$$\text{Ar } u=0 \Rightarrow n|x \Rightarrow n|A$$

$$\text{Ar } 0 < u \leq n-1 \Rightarrow \exists 1 \leq a \leq n-1$$

$$x = n\eta + u \quad (1)$$

$$x+1 = n\eta + u+1 \quad (2)$$

$$x+2 = n\eta + u+2 \quad (3)$$

$\vdots$

$$x+n-1 = n\eta + (u+n-1) \quad (n)$$

$\nwarrow$ Διαίρεται από το n

$$\text{ώστε } u+a=n$$

Αρα ο αριθμός $x+a = n\eta + u+a = n\eta + n = n(\eta+1)$ διαίρεται με το n

Αρα και το A διαίρεται με το n

$$x \quad x+1 \quad \dots \quad x+n-1$$

$$\downarrow u \quad u+1 \quad \dots \quad u+n-1$$

β) $x, y \in \mathbb{Z}'$

$$2 \nmid xy \Rightarrow 2 \nmid x^2 + y^2$$

$$\Downarrow 4 \nmid x^2 + y^2$$

$$x = 2k+1 \quad \left| \quad x^2 + y^2 = (2k+1)^2 + (2d+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 + 4d^2 + 4d + 1 = 4(k^2 + k + d^2 + d) + 2 \right.$$

$$y = 2d+1$$

$$\text{Αρα } 2 \nmid x^2 + y^2$$

Αλλά το $4 \nmid x^2 + y^2$, διότι αν το διαγράψαμε τότε θα διαγράφαμε και

το $2 = x^2 - y^2 - 4(k^2 + k + d^2 + d)$ (Ανταρτί των διαγράψε τους). Αδύνατον.

2) $\forall a \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow a = 2^n \vee a = 2^n(2x+1)$
 $n \in \mathbb{N}$ για $x \in \mathbb{N}$

$$3 = 2^0(2 \cdot 1 + 1) \quad \underline{2k+1 = 2^0(2k+1)}$$

$$36 = 2^2(2 \cdot 4 + 1) \quad \text{περίττος}$$

Για τον a : Διαγράφουμε τον a με την μεγαλύτερη δύναμη του 2 που τον διαιρεί και έχουμε $a = 2^n(2k+1)$

4)

α) $\forall a \in 2^n + 1$ είναι πρώτος $\Rightarrow n = 2^k$

$\forall$ είχαμε $n = 2^k(2d+1)$ (από το προηγούμενο)
 $2^{2^k(2d+1)} + 1$ είναι πρώτος $= (2^{2^k})^{2d+1} + 1 =$
 $= (2^{2^k} + 1) [(2^{2^k})^{2d} - (2^{2^k})^{2d-1} + \dots + 1]$ γινόμενο. Αδύνατο.

$k=0 : 2^{2^0} + 1 = 3$	$k=2 : 2^{2^2} + 1 = 17$
$k=1 : 2^{2^1} + 1 = 5$	Είναι πάντα πρώτος ;

β) $2^n - 1$ πρώτος $\Rightarrow n$ πρώτος

Έστω $n = a \cdot b$ όχι πρώτος

$$2^{a \cdot b} - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)(2^a)^{b-1} + \dots + 1$$
 γινόμενο

6) $a \mid 12n+5$

$a \mid 4n+2 \Rightarrow a \mid 3(4n+2) = 12n+6$

$\Rightarrow$ (τότε θα πρέπει να διαιρεί και την διαφορά τους).

(Μπορούμε να πούμε με ότι θέλουμε για να μας βολεύει)

$$a \mid 12n+6 - (12n+5) = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

$$7) \quad 8n+7 = a^2+b^2+c^2$$

Έστω a, b, c άρτιοι

$$a=2k \Rightarrow a^2=4k^2$$

$$b=2\lambda \Rightarrow b^2=4\lambda^2$$

$$c=2\mu \Rightarrow c^2=4\mu^2$$

$$\text{Έχουμε } 4 \mid a^2+b^2+c^2 = 8n+7, \text{ αδύνατον}$$

Έστω a, b άρτιοι και c περιττός

$$a=2k \Rightarrow a^2=4k^2$$

$$b=2\lambda \Rightarrow b^2=4\lambda^2$$

$$c=2\mu+1 \Rightarrow c^2=4\mu^2+4\mu+1$$

$$\text{Έχουμε } a^2+b^2+c^2=4(k^2+\lambda^2+\mu^2+\mu)+1=8n+7$$

$$4(k^2+\lambda^2+\mu^2+\mu)=8n+6 \Rightarrow$$

$$4 \mid 8n+6 \quad \Bigg| \Rightarrow \quad 4 \mid 8n+6-8n=6 \quad \text{Αδύνατον.}$$

$$4 \mid 8n$$

Ομοίως αν a, b, c περιττοί

Να γράψετε το 1019 στην δεκαδική τους ανάπτυξη.

$$1019 = 1 \cdot 10^3 + 19 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 19 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9$$

Να γράψετε το 1019 στην πενταδική ανάπτυξη.

Ψηφία: $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

$$5^1, 5^2=25, 5^3=125, 5^4=625, 5^5=3125$$

$$\begin{aligned} 1019 &= 1 \cdot 5^4 + 394 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 19 = 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 19 \\ &= 1 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 \end{aligned}$$

για να τον γράψω στην 5-δική παίρνω τα ψηφία του.

$$\text{Άρα } (1, 3, 0, 3, 4)_5 = 1019.$$

Έχουμε $5_{10} = 1019 = (13034)_5$
και $10_{10} = (1019)_{10}$

Τα ψηφία που χρησιμοποιούμε στην 11-δική: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *\}$

Να γραφεί το 61 στην 2-δική ανάστροφα.

Ψηφία: $\{0, 1\}$

$$2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64$$

$$\begin{aligned}\text{Άρα } 61 &= 1 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1\end{aligned}$$

$$\text{Άρα το } 61 = (111101)_2$$

Θεώρημα:

Κάθε φυσικός $n > 0$ γράφεται μοναδικά με βάση το 2.

$$n = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0$$

Όπου $c_r \neq 0$ και $c_{r-1}, \dots, c_0 \in \{0, 1\}$

Απόδειξη:

Με ισχύει Μαθηματική Επαγωγή

$n=1$ Ισχύει

$n=2$: $1 \cdot 2^1 + 0$ Ισχύει

$n=3$: $1 \cdot 2^1 + 1$ Ισχύει

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς $\leq k$

Θα δείξουμε για το k .

Αν το $k = 2m \Rightarrow m \leq k-1$. Άρα από την υπόθεση

$$m = c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 \cdot 2 + c_0 \Rightarrow$$

$$k = 2m = c_r \cdot 2^{r+1} + c_{r-1} 2^r + \dots + c_1 2^2 + c_0 2 + 0 \text{ Ισχύει}$$

Αν $k = 2m + 1 \Rightarrow \frac{k-1}{2} = m < k-1$ Από υπόθεση

εργαζόμαστε ομοίως, άρα:

$$\frac{k-1}{2} = m = (c_r 2^r + c_{r-1} 2^{r-1} + \dots + c_1 2 + c_0)$$

$$k = 2m + 1 = (c_r 2^{r+1} + c_{r-1} 2^r + \dots + c_1 2^2 + c_0 2 + 1) \text{ Ισχύει.}$$

Μοναδικότητα: Με ισχυρή Μαθηματική Επαγωγή

Η πρόταση $Q(n) = (c_r 2^r + \dots + c_0)$ γράφεται μοναδικά με $c_r \neq 0$ και $c_{r-1}, \dots, c_0 \in \{0, 1\}$

$n = 1$: μοναδική

$n = 2$: μοναδική

$n = 3$: $1 \cdot 2 + 1$ μοναδική

Υποθέτουμε ότι ισχύει για όλους τους φυσικούς $< k$

Θα δείξουμε για k .

Αν $0 < k = 2m$

Το m γράφεται μοναδικά $m = (c_r 2^r + \dots + c_0)$

$$k = 2m = (c_r 2^{r+1} + \dots + c_0 2 + 0)$$

Αν $0 < k = 2m + 1 \Rightarrow$

$\frac{k-1}{2} = m$ γράφεται μοναδικά $\Rightarrow \dots$ (ομοίως).

Μεταθέσεις:

$$\{0, 1, 2\}$$

οόδες διατεταγμένες τριάδες μπορούμε να συμπληρώσουμε με αυτά τα σύμβολα, είναι διαφορετικό το $(0, 1, 2) \neq (1, 0, 2)$ επειδή έχει σημασία η σειρά.

$$\frac{3^{ενιδ}}{1^n}$$

$$\frac{2^{ενιδ}}{2^n}$$

$$\frac{1^{ενιδ}}{3^n}$$

Ο αριθμός των ενιδογών είναι:
 $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$

Πρόταση:

Αν ένα σύνολο A έχει n στοιχεία, τότε υπάρχουν $n!$ διατεταγμένες n -άδες.

Απόδειξη:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

Μια διατεταγμένη n -άδα έχει n θέσεις με συγκεκριμένη σειρά.
 $\frac{n-ενιδογες}{1-θεση} \quad \frac{(n-1)-ενιδογες}{2-θεση} \quad \dots \quad \frac{1-ενιδογες}{n-θεση}$

► Άρα ο αριθμός των ενιδογών $M(n, n)$ είναι:
 $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$

Με $M(n, k)$ θα συμβολίσουμε όλες τις διατάξεις - μεταθέσεις που σχηματίζονται από ένα σύνολο n στοιχείων σε k συγκεκριμένες θέσεις.